1η δεκάδα θεμάτων επανάληψης

1.

A.

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\ y_2)$ δύο διανύσματα

i) Να γράψετε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου τους

ii) Αν τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσής τους, αποδείξτε την ισοδυναμία

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_1\lambda_2=-1$$

iii) Αν τα διανύσματα είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία τους, δείξτε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

B.

i) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda\,,\,\lambda-1)$ και $\vec{\beta}=(4,\ \lambda)$, $\lambda\neq 0$

Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα είναι κάθετα ;

$\lambda=1$, $\lambda=3$, $\lambda=2$, $\lambda=-2$, $\lambda=-3$.

Κυκλώστε την σωστή απάντηση

ii) Αν $\vec{u}=(1,\ -\sqrt{3})$, $\vec{v}=(2,\ 2\sqrt{3})$, $\vec{w}=(\sqrt{3},\ 1)$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία της στήλης Α με το μέτρο της , της στήλης Β

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$	$\frac{\pi}{2}$
Γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$	$\frac{\pi}{6}$
Γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$	$\frac{\pi}{4}$
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{3\pi}{4}$
	$\frac{\pi}{3}$

Προτεινόμενη λύση

A.i)

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$

A.ii)

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1x_2+y_1y_2=0$ **(1)**

και αφού τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα στον άξονα y΄y, θα είναι $x_1x_2\neq 0$.

Οπότε διαιρώντας τα δύο μέλη της (1) με x_1x_2 έχουμε $\frac{x_1x_2}{x_1x_2}+\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=0$

$$1+\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=0$$
$$1+\lambda_1\cdot\lambda_2=0$$
$$\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$$

A.iii)

Γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}\theta$ **(2)** , όπου $\theta=(\vec{\alpha}\,\widehat{\ }\,\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha},\ \vec{\beta}\neq\vec{0}\quad\Rightarrow\quad|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\neq 0$$

Οπότε η (2) $\Rightarrow$ $\text{συν}\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

B.i)

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\quad\Leftrightarrow\quad 4\lambda+\lambda(\lambda-1)=0$$
$$\lambda^2+3\lambda=0$$
$$\lambda(\lambda+3)=0$$
$$\lambda=0\ \text{ή}\ \lambda=-3$$

οπότε κυκλώνουμε την τιμή -3

B. ii)

Είναι $\text{συν}(\vec{u}\,\widehat{\ }\,\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{1\cdot 2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}}$

$$=\frac{-4}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}}=-\frac{1}{2}$$ Άρα $(\vec{u}\,\widehat{\ }\,\vec{v})\rightarrow\dfrac{2\pi}{3}$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\text{συν}(\vec{u}\,\widehat{\ }\,\vec{w})=0$ Άρα $(\vec{u}\,\widehat{\ }\,\vec{w})\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$ και

$\text{συν}(\vec{v}\,\widehat{\ }\,\vec{w})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Άρα $(\vec{v}\,\widehat{\ }\,\vec{w})\rightarrow\dfrac{\pi}{6}$

2.

Δίνονται τα σημεία $A(8, 0)$ και $B(0, 4)$

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ

iii) Αν Μ τυχαίο σημείο της (ε), δείξτε ότι $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO}^2$

Προτεινόμενη λύση

i)

Δ μέσο του ΑΒ $\Rightarrow$ $x_\Delta = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{8+0}{2} = 4$ και $y_\Delta = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$

Η ευθεία ΟΔ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και το $\Delta(4, 2)$

έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{2-0}{4-0} = \dfrac{1}{2}$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας ΟΔ είναι $y = \lambda x \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x$

ii)

$$(\varepsilon) \perp O\Delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon . \lambda_{O\Delta} = -1$$
$$\frac{1}{2}\lambda_\varepsilon = -1$$
$$\lambda_\varepsilon = -2$$

Επειδή η (ε) διέρχεται από το $\Delta(4, 2)$ θα έχει εξίσωση $y-2 = -2(x-4)$

$$y = -2x + 10 \qquad \textbf{(1)}$$

iii)

Αν $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της (ε), λόγω της (1) θα είναι $M(x, -2x+10)$

Οπότε $\overrightarrow{MA} = (x_A - x_M,\ y_A - y_M) = (8-x,\ 2x-10)$,

$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M,\ y_B - y_M) = (-x,\ 4+2x-10)$

$= (-x,\ 2x-6)$

$\overrightarrow{MO} = (x_O - x_M,\ y_O - y_M) = (-x,\ 2x-10)$

Επομένως $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO}^2 \Leftrightarrow$

$$|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 2|\overrightarrow{MO}|^2$$

$$\left(\sqrt{(8-x)^2 + (2x-10)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-x)^2 + (2x-6)^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{(-x)^2 + (2x-10)^2}\right)^2$$

$$64 - 16x + x^2 + 4x^2 - 40x + 100 + x^2 + 4x^2 - 24x + 36 = 2(x^2 + 4x^2 - 40x + 100)$$

$$10x^2 - 80x + 200 = 10x^2 - 80x + 200$$ η οποία είναι προφανής .

3.

Έστω η εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 2\lambda(x + y-1)$ **(1)** όπου $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 2011$.

i) Να δείξετε ότι η (1) είναι εξίσωση κύκλου για όλες τις τιμές του λ, του οποίου κύκλου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ii) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) για τα διάφορα λ διέρχονται από σταθερό σημείο Α του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

iii) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) εφάπτονται της ευθείας $x + y-1 = 0$ στο σημείο Α .

Προτεινόμενη λύση

i)

$$(x-1)^2 + y^2 = 2\lambda(x + y-1) \Leftrightarrow x^2-2x + 1 + y^2 = 2\lambda x + 2\lambda y -2\lambda$$
$$x^2-2x + 1 + y^2 -2\lambda x -2\lambda y + 2\lambda = 0$$
$$x^2 + y^2 + (-2-2\lambda)x-2\lambda y + 2\lambda + 1= 0$$

Είναι $A^2 +B^2-4\Gamma = (-2-2\lambda)^2 +(-2\lambda)^2-4(2\lambda+1)$
$= 4 + 8\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 4$
$= 8\lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda = 1, 2, 3,\ldots, 2011$

Άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου

με κέντρο : $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{-2-2\lambda}{2}, -\frac{-2\lambda}{2}\right) = K(\lambda + 1, \lambda)$

και ακτίνα : $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2} = \lambda\sqrt{2}$

ii)

Για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ από την (1) προκύπτουν οι κύκλοι
C_1: $x^2 + y^2 -4x -2y +3 = 0$ και C_2: $x^2 + y^2 -6x -4y + 5 = 0$

Λύνουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων .
Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις έχουμε $2x + 2y -2 = 0 \Leftrightarrow$
$y = 1-x$ **(2)**

Η C_1 γίνεται
$$x^2 + (1-x)^2 -4x -2(1-x) +3 = 0$$
$$x^2 + 1-2x + x^2 -4x-2 + 2x + 3 = 0$$
$$2x^2-4x + 2=0$$
$$x^2-2x + 1= 0$$
$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και λόγω της (2) } y = 0$$

Οπότε οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται στο σημείο με συντεταγμένες (1, 0)
Η (1) για $x = 1$ και $y = 0$ γίνεται $0 = 0\lambda$ πράγμα που σημαίνει ότι επαληθεύεται για κάθε $\lambda = 1, 2, 3,\ldots,2011$
Άρα όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο Α(1, 0)

iii)

Είναι προφανές ότι οι συντεταγμένες του σημείου Α(1, 0) επαληθεύουν την εξίσωση $x + y-1= 0$, άρα το Α ανήκει **και** στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y-1= 0 \Leftrightarrow$
$y =-x +1$
της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι : $\lambda_\varepsilon = -1$

Η ακτίνα ΚΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{KA}= \dfrac{\lambda-0}{\lambda+1-1}=1$

Επειδή $\lambda_{\varepsilon}\cdot\lambda_{KA}=-1$, η ακτίνα ΚΑ είναι κάθετη στην ευθεία (ε)
Επομένως όλοι οι κύκλοι της (1) εφάπτονται στην (ε) στο σημείο Α.

4.

i) Πότε λέμε ότι ο ακέραιος α διαιρείται με τον ακέραιο $\beta \neq 0$;

ii) Αν ο ακέραιος αριθμός λ δεν διαιρείται με το 3 , να δείξετε ότι ο αριθμός λ^2+5 είναι πολλαπλάσιο του 3.

iii) Να αποδείξετε ότι, για κάθε ακέραιο αριθμό κ ο ακέραιος $\kappa(\kappa^2+5)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Προτεινόμενη λύση

i)

Θα λέμε ότι ο ακέραιος α διαιρείται με τον μη μηδενικό ακέραιο β όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ έτσι ώστε να ισχύει $\alpha=\kappa\beta$

ii)

Αφού ο λ δεν διαιρείται με το 3, η διαίρεσή του με το 3 θα αφήνει υπόλοιπο 1 ή 2, οπότε ο λ θα είναι της μορφής $\lambda=3\kappa+1$ ή $\lambda=3\kappa+2$

- Όταν $\lambda=3\kappa+1$

  $\lambda^2+5 = (3\kappa+1)^2+5$
  $= 9\kappa^2+6\kappa+1+5$
  $= 9\kappa^2+6\kappa+6$
  $= 3(3\kappa^2+2\kappa+2)=3\mu$, όπου $\mu=(3\kappa^2+2\kappa+2)\in\mathbb{Z}$

  Άρα $\lambda^2+5=$ πολ3

- Όταν $\lambda=3\kappa+2$

  $\lambda^2+5 = (3\kappa+2)^2+5$
  $= 9\kappa^2+12\kappa+4+5$
  $= 9\kappa^2+12\kappa+9$
  $= 3(3\kappa^2+4\kappa+3)=3\nu$, όπου $\nu=(3\kappa^2+4\kappa+3)\in\mathbb{Z}$

  Άρα $\lambda^2+5=$ πολ3

iii)

Θα είναι $\kappa=3\mu$ ή $\kappa=3\mu+1$ ή $\kappa=3\mu+2$

- Όταν $\kappa=3\mu$

  $\kappa(\kappa^2+5) = 3\mu(9\mu^2+5)=3\rho$, όπου $\rho=\mu(9\mu^2+5)\in\mathbb{Z}$
  δηλαδή $\kappa(\kappa^2+5)=$ πολ3

- Όταν $\kappa=3\mu+1$ ή $\kappa=3\mu+2$

  Όπως αποδείξαμε στο (ii) ο κ^2+5 είναι πολλαπλάσιο του 3,
  άρα και ο $\kappa(\kappa^2+5)=$ πολ3 .

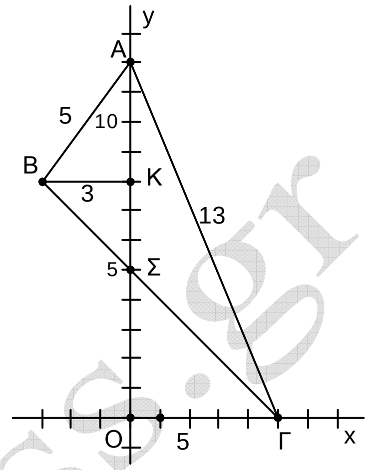
5.

Στο παρακάτω σχήμα με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy, τα σημεία Α, Β, Γ παριστάνουν τις θέσεις τριών χωριών, ο άξονας y΄y παριστάνει μία εθνική οδό και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ δύο επαρχιακούς δρόμους με μήκος 5km και 13km αντίστοιχα . Οι αποστάσεις των χωριών Β και Γ από την εθνική οδό είναι 3km και 5km αντίστοιχα. Να βρείτε

i) Τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ

ii) Την απόσταση των χωριών Β και Γ

iii) Την εξίσωση της ευθείας ΒΓ και τις συντεταγμένες του σημείου Σ, στο οποίο η ευθεία ΒΓ συναντάει την εθνική οδό.



Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού ΟΓ= 5 προφανώς θα είναι Γ(5, 0)

$$AO^2 = A\Gamma^2 - O\Gamma^2 \Leftrightarrow AO^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$AO = \sqrt{144} = 12$$

Επομένως οι συντεταγμένες του Α είναι Α(0, 12)

$$AK^2 = AB^2 - BK^2 \Leftrightarrow AK^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$AK = \sqrt{16} = 4$$

Συνεπώς $OK = OA - AK = 12 - 4 = 8$, άρα Κ(0 , 8) και επομένως Β(−3, 8)

ii)

$$B\Gamma = \sqrt{(x_B - x_\Gamma)^2 + (y_B - y_\Gamma)^2} = \sqrt{(-3-5)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$$

iii)

Η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{y_B - y_\Gamma}{x_B - x_\Gamma} = \dfrac{8-0}{-3-5} = -1$,

και επειδή διέρχεται από το Γ(5, 0), η εξίσωση αυτής θα είναι

$$y - 0 = -1(x-5) \Leftrightarrow y = -x + 5$$

Επειδή για $x = 0$ έχουμε $y = 5$, το σημείο τομής Σ της ΒΓ με την εθνική οδό έχει συντεταγμένες Σ(0, 5)

6.

i) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα ρ

ii) Με ποια προϋπόθεση η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο και η ακτίνα του;

iii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ σ'ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iv) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του που διέρχεται από το M είναι η ευθεία με εξίσωση :
$x + 3y = 10$, $5x - y = 8$, $x - 3y = 10$, $3x + 2y = 3$, $x + 2y = 10$.
Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η ζητούμενη εξίσωση είναι $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$

ii)

Θα πρέπει να ισχύει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

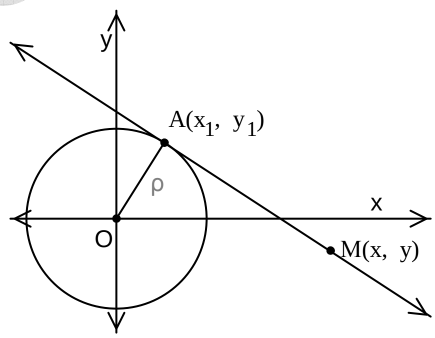
Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και η ακτίνα του ρ είναι

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

iii)

$M(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης στο A $\Leftrightarrow$ $OA \perp AM$

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AM}$$
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0$$
$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0$$
$$xx_1 - x_1^2 + yy_1 - y_1^2 = 0$$
$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 \quad \textbf{(1)}$$



Επειδή το σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο θα είναι $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$.

Η (1) γίνεται $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

iv)

Σύμφωνα με το (iii) η ζητούμενη εφαπτομένη θα έχει εξίσωση

$x \cdot 1 + y \cdot (-3) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y = 10$

7.

i) Στην στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις δύο κύκλων και στην στήλη Β τα κέντρα και οι ακτίνες τους.
Αντιστοιχίστε κάθε κύκλο στο κέντρο και την ακτίνα του.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$C_1:\ x^2+y^2-6x+4y-3=0$	(α) $K(0,\ -1)$, $\rho=2$
$C_2:\ x^2+(y+1)^2=4$	(β) $K(3,\ -2)$, $\rho=1$
	(γ) $K(3,\ -2)$, $\rho=4$

ii) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με τις λέξεις ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δικαιολογώντας την απάντηση σας
α) Το σημείο $(1,\ -1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=2$
β) Ο κύκλος $x^2+y^2=4$ και η ευθεία $y=2x$ εφάπτονται
γ) Η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda^2=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου .

iii) Στη στήλη Α δίνονται δύο κύκλοι . Αντιστοιχίστε σε αυτούς τη σχετική τους θέση που αναφέρεται στην στήλη Β δικαιολογώντας την απάντηση σας.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$C_1:\ (x-6)^2+y^2=4$	**(α)** Οι κύκλοι τέμνονται
$C_2:\ x^2+y^2-4x-6y-12=0$	**(β)** Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά
	(γ) Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

Προτεινόμενη λύση

i)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)=K(3,\ -2)$

και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{36+16+12}}{2}=4$

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο το σημείο $K(0,\ -1)$ και ακτίνα $\rho=2$.
Επομένως $C_1\to$ (γ) και $C_2\to$ (α)

ii)

α) Επειδή η εξίσωση $x^2+y^2=2$ επαληθεύεται για $x=1$ και $y=-1$, το δοσμένο σημείο ανήκει στον κύκλο, άρα η πρόταση είναι ΣΩΣΤΗ .

β) Επειδή ο κύκλος $x^2+y^2=4$ έχει κέντρο το σημείο $O(0,\ 0)$ από το οποίο διέρχεται η ευθεία $y=2x$, η ευθεία τέμνει τον κύκλο και επομένως η πρόταση είναι ΛΑΘΟΣ.

γ) Η εξίσωση γράφεται $x^2+y^2=-\lambda^2$ με $-\lambda^2\leq 0$, άρα η εξίσωση δεν είναι εξίσωση κύκλου. Επομένως η πρόταση είναι ΛΑΘΟΣ.

iii)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(6,\ 0)$ και ακτίνα $\rho_1=2$

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)=K_2(2,\ 3)$

και ακτίνα $\rho_2=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{16+36+48}}{2}=5$

Η διάκεντρος K_1K_2 των δύο κύκλων έχει μήκος $K_1K_2=\sqrt{(6-2)^2+(0-3)^2} = 5$

Επίσης $\rho_2-\rho_1 = 5-2 = 3$ και $\rho_2+\rho_1 = 5+2 = 7$

Όμως $3 < 5 < 7$, δηλαδή $\rho_2-\rho_1 < K_1K_2 < \rho_2+\rho_1$

Άρα οι κύκλοι τέμνονται.

8.

Έστω ο ακέραιος $\alpha = 16\kappa - 9$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

i) Να δείξετε ότι ο α είναι περιττός.

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 8.

iii) Να δείξετε ότι ο αριθμός $A = (\alpha^2 + 15)(\alpha^2 - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha = 16\kappa - 10 + 1 = 2(8\kappa - 5) + 1 = 2\rho + 1$, όπου $\rho = (8\kappa - 5)\in\mathbb{Z}$

Άρα ο α είναι περιττός

ii)

$\alpha = 16\kappa - 9 = 16\kappa - 16 + 7 = 8(2\kappa - 2) + 7 = 8\pi + 7$, όπου $\pi = (2\kappa - 2)\in\mathbb{Z}$.

Άρα το υπόλοιπο είναι 7

iii)

Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι ακέραιος της μορφής $8\lambda + 1$

Επειδή λοιπόν ο α είναι περιττός θα είναι $\alpha^2 = 8\lambda + 1$, $\lambda\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα}\quad A &= (8\lambda+1+15)(8\lambda+1-1) \\ &= (8\lambda+16)\,8\lambda \\ &= 8(\lambda+2)\,8\lambda \\ &= 64\nu,\quad \text{όπου}\ \nu=\lambda(\lambda+2)\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Οπότε $A = \pi o\lambda 64$.

9.

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$

i) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$

ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

iii) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{\alpha}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Σύστημα των εξισώσεων $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ **(1)** και

$\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$3\vec{\alpha} = (4, -2) + (-7, 8)$$
$$3\vec{\alpha} = (-3, 6)$$
$$3\vec{\alpha} = 3(-1, 2) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (-1, 2)$$

Η (1) γίνεται $2(-1, 2) + 3\vec{\beta} = (4, -2) \Leftrightarrow 3\vec{\beta} = (4, -2) - 2(-1, 2)$

$$3\vec{\beta} = (4, -2) - (-2, 4)$$
$$3\vec{\beta} = (6, -6)$$
$$3\vec{\beta} = 3(2, -2)$$
$$\vec{\beta} = (2, -2)$$

ii)

Με βάση το (i) έχουμε $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \kappa(-1, 2) + (2, -2)$

$$= (-\kappa + 2, \ 2\kappa - 2)$$

και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2(-1, 2) + 3(2, -2)$

$$= (-2, 4) + (6, -6) = (4, -2)$$

Οπότε $(\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = 0$

$$(-\kappa + 2, \ 2\kappa - 2)\cdot(4, -2) = 0$$
$$-4\kappa + 8 - 4\kappa + 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{2}$$

iii)

Έστω $\vec{\gamma} = \vec{\gamma_1} + \vec{\gamma_2}$, όπου $\vec{\gamma_1} = \lambda\vec{\alpha} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma_2} \perp \vec{\gamma_1}$

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$

$$= \vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}^2$$

$$= \lambda|\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow (-1, 2)(3, -1) = \lambda(1 + 4)$$
$$-3 - 2 = 5\lambda$$
$$\lambda = -1$$

Επομένως $\vec{\gamma_1} = \lambda\vec{\alpha} = -1(-1, 2) = (1, -2)$

και $\vec{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_1} + \overrightarrow{\gamma_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\gamma_2} = \vec{\gamma} - \overrightarrow{\gamma_1}$

$\overrightarrow{\gamma_2} = (3, \ -1) - (1, \ -2) = (2, \ 1)$

Άρα $\vec{\gamma} = (1, \ -2) + (2, \ 1)$

10.

i) Αν $\vec{\alpha} = (x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,\ y_2)$, να γράψετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί.

ii) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του επιπέδου και $(x\ ,\ y)$ οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ να αποδείξετε ότι

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

iii) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του επιπέδου να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και την απόσταση των σημείων Α, Β

iv) Στον παρακάτω πίνακα στη στήλη Α δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων Α και Β και στην στήλη Β δίνονται οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και η απόσταση των σημείων Α, Β. Να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις .

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $A(1, 3)$ και $B(-2,\ 5)$	**κ.** $\overrightarrow{AB} = (-3,\ 2)$ και $(AB) = \sqrt{15}$
β. $A(2,\ -1)$ και $B(2,\ -3)$	**λ.** $\overrightarrow{AB} = (0, -2)$ και $(AB) = 2$
γ. $A(4,\ -3)$ και $B(6,\ -3)$	**μ.** $\overrightarrow{AB} = (-3,\ 2)$ και $(AB) = \sqrt{13}$
	ν. $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ και $(AB) = 2$

v) Αν $K(x_1, 6)$ και $\Lambda(-9,\ y_2)$ δύο σημεία του επιπέδου και $M(-5,\ 4)$ το μέσο του τμήματος ΚΛ, τότε $x_1 = 1$ και $y_2 = -2$

$x_1 = -1$ και $y_2 = 2$

$x_1 = -3$ και $y_2 = 2$

$x_1 = 4$ και $y_2 = 5$

τίποτα από αυτά .

Κυκλώστε την σωστή απάντηση .

Προτεινόμενη λύση

i)

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)$, $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2\ ,\ \lambda y_1 + \mu y_2)$

ii)

Γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{OM} = (x,\ y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2,\ y_2)$

Ακόμη $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow (x,\ y) = \frac{1}{2}[(x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2)]$

$$(x,\ y) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)$$

$$(x,\ y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

iii)

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ και $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

iv)

Όταν $A(1,\ 3)$ και $B(-2,\ 5)$ τότε $\overrightarrow{AB} = (-2-1,\ 5-3) = (-3,\ 2)$

και $(AB) = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$

Επομένως **(α) → (μ)**

Όταν $A(2,\ -1)$ και $B(2,\ -3)$ τότε $\overrightarrow{AB} = (2-2,\ -3+1) = (0,\ -2)$

και $(AB) = \sqrt{(2-2)^2 + (-3+1)^2} = 2$

Επομένως **(β) → (λ)**

Όταν $A(4,\ -3)$ και $B(6,\ -3)$ τότε $\overrightarrow{AB} = (6-4,\ -3+3) = (2,\ 0)$

και $(AB) = \sqrt{(4-6)^2 + (-3+3)^2} = 2$

Επομένως **(γ) → (ν)**

v)

Είναι $-5 = \dfrac{x_1 - 9}{2} \Leftrightarrow x_1 = -1$ και $4 = \dfrac{6 + y_2}{2} \Leftrightarrow y_2 = 2$

Οπότε κυκλώνουμε την $x_1 = -1$ και $y_2 = 2$